Αλγεβρικές Δομές Ι (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #2

1. Για κάθε μια από τις παρακάτω ομάδες να βρεθούν τουλάχιστον δύο μη-τετριμμένες γνήσιες υποομάδες

$$(\mathbb{Z},+), \qquad (\mathbb{Q},+), \qquad (S_3,\circ), \qquad (8\mathbb{Z},+), \qquad (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\cdot).$$

2. Να προσδιορισθεί η κυκλική υποομάδα $< A >$ της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ η οποία παράγεται από τον πίνακα A, όπου A είναι ένας εκ των πινάκων

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Δείξτε ότι αν H και K είναι δύο υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας $(G,*)$, τότε το υποσύνολο

$$H * K = \{h * k : h \in H, k \in K\}$$

είναι υποομάδα της G. Επίσης να αποδείξετε με την βοήθεια αντιπαραδείγματος ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει όταν η ομάδα G δεν είναι αβελιανή.

4. (α΄) Αν H, K είναι υποομάδες μιας ομάδας G δείξτε ότι η ένωση $H \cup K$ είναι υποομάδα αν και μόνο αν είτε $H \subseteq K$ είτε $K \subseteq H$.

   (β΄) Δείξτε ότι δεν υπάρχει ομάδα που να είναι ένωση δύο γνησίων υποομάδων της.

   (γ΄) Δείξτε ότι η ομάδα $(U(\mathbb{Z}_8),\cdot)$ είναι ένωση τριών γνησίων υποομάδων της.

5. (α΄) Συμβολίζουμε με T το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μέτρο ίσο με 1, δηλαδή

$$\mathrm{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

   Να δειχθεί ότι το T αποτελεί υποομάδα του $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

   (β΄) Συμβολίζουμε με U το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z με την ιδιότητα να υπάρχει θετικός ακέραιος n ώστε $z^n = 1$. Δείξτε ότι το U είναι υποομάδα της $(\mathrm{T},\cdot)$.

   (γ΄) Έστω m θετικός ακέραιος. Θέτουμε

$$\mathrm{U}_m = \{z \in \mathbb{C} : z^m = 1\}.$$

   Η U_m ονομάζεται ομάδα των m-στων ριζών της μονάδος στο $\mathbb{C}$. Δείξτε ότι η U_m είναι υποομάδα της $(\mathrm{U},\cdot)$.

   (δ΄) Δείξτε ότι $U = \cup_{m=1}^{\infty} \mathrm{U}_m$. Επιπλέον, δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο m η ομάδα U_m είναι κυκλική και ότι η ομάδα U δεν είναι κυκλική.